Pismeni dio ispita iz Matematike I, 19. 06. 2014.

I GRUPA

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od realnog parametra λ :
$$\begin{aligned}&-x+6y+(\lambda+3)z=21\\&-x+3y+2z=9\\&x+3y+2\lambda z=\lambda+13.\end{aligned}$$
2. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $M(3,-1,-1)$ i siječe pravu $a:\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$ pod uglom od $\frac{\pi}{3}$.
3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik $y=\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}$.
4. Izračunati integral $I=\int\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ pomoću smjene $\frac{1-x}{1+x}=t^2$.

II GRUPA

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od realnog parametra λ :
$$\begin{aligned}&-x+8y+(\lambda+4)z=29\\&-x+4y+3z=13\\&x+4y+(2\lambda-1)z=\lambda+16.\end{aligned}$$
2. Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz pravu $a:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$, a sa pravom $b:\begin{cases}x+y-2z-3=0\\x+y+z+3=0\end{cases}$ gradi ugao $\varphi=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.
3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik $y=\ln\left(e^{2x}-5e^{x}+7\right)$.
4. Izračunati integral $I=\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$ pomoću smjene $\frac{2-x}{2+x}=t^3$.

III GRUPA

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od realnog parametra λ :
$$\begin{aligned}&-x+10y+(\lambda+5)z=37\\&-x+5y+4z=17\\&x+5y+(2\lambda-2)z=\lambda+19.\end{aligned}$$

2. Neka je α ravan koja sadrži pravu $a:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{2}$ i tačku $A(1,1,-2)$. Naći tačku koja je simetrična koordinatnom početku u odnosu na ravan α.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik $y=\frac{x+2}{xe^{\frac{2}{x}}}$.

4. Izračunati integral $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}$, pomoću smjene $\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}=t$.

RJEŠENJA

1. Računamo najprije determinante:

$$D=\begin{vmatrix}-1 & 6 & \lambda+3\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 2\lambda\end{vmatrix}=|\text{dodamo treću vrstu na prvu i drugu}|=\begin{vmatrix}0 & 9 & 3\lambda+3\\ 0 & 6 & 2\lambda+2\\ 1 & 3 & 2\lambda\end{vmatrix}=$$

$$|\text{razvijamo determinantu po prvoj koloni}|=9(2\lambda+2)-6(3\lambda+3)=18\lambda+18-18\lambda-18=0.$$

$$D_x=\begin{vmatrix}21 & 6 & \lambda+3\\ 9 & 3 & 2\\ \lambda+13 & 3 & 2\lambda\end{vmatrix}=|\text{pomnožimo drugu vrstu sa } (-2) \text{ i dodamo na prvu vrstu; oduzmemo treću vrstu}$$

$$\text{od druge}|=\begin{vmatrix}-2\lambda-5 & 0 & -3\lambda+3\\ -\lambda-4 & 0 & 2-2\lambda\\ \lambda+13 & 3 & 2\lambda\end{vmatrix}=|\text{razvijamo determinantu po drugoj koloni}|$$

$$=-3\left[(-2\lambda-5)2(1-\lambda)-3(1-\lambda)(-\lambda-4)\right]=-3(1-\lambda)(-4\lambda-10+3\lambda+12)=-3(1-\lambda)(2-\lambda)=$$

$$=-3(\lambda-1)(\lambda-2).$$

$$D_y=\begin{vmatrix}-1 & 21 & \lambda+3\\ -1 & 9 & 2\\ 1 & \lambda+13 & 2\lambda\end{vmatrix}=|\text{dodamo treću vrstu na prvu i drugu}|=\begin{vmatrix}0 & \lambda+34 & 3\lambda+3\\ 0 & \lambda+22 & 2\lambda+2\\ 1 & \lambda+13 & 2\lambda\end{vmatrix}=$$

|razvijamo determinantu po prvoj koloni|

$$=2(\lambda+1)(\lambda+34)-3(\lambda+1)(\lambda+22)=(\lambda+1)(2\lambda+68-3\lambda-66)=(\lambda+1)(2-\lambda)=-(\lambda+1)(\lambda-2).$$

$$D_z=\begin{vmatrix}-1 & 6 & 21\\ -1 & 3 & 9\\ 1 & 3 & \lambda+13\end{vmatrix}=|\text{dodamo treću vrstu na prvu i drugu}|=\begin{vmatrix}0 & 9 & \lambda+34\\ 0 & 6 & \lambda+22\\ 1 & 3 & \lambda+13\end{vmatrix}=$$

|razvijamo determinantu po prvoj koloni|

$$=9\lambda+198-6\lambda-204=3\lambda-6=3(\lambda-2).$$

Diskusija:

1) $\lambda\neq 2\Rightarrow$ sistem nema rješenja jer je tada $D=0$, dok je bar jedna od preostale 3 determinante različita od nule.

2) $\lambda = 2 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0.$

Sistem tada glasi:

$-x + 6y + 5z = 21$ .....(1)

$-x + 3y + 2z = 9$ ......(2)

$x + 3y + 4z = 15$ ......(3)

Ako saberemo jednačine (1) i (3), dobićemo: $9y + 9z = 36 \Rightarrow y + z = 4,$ a isto to dobijemo ako saberemo jednačine (2) i (3): $6y + 6z = 24 \Rightarrow y + z = 4.$

Otuda, sistem u ovom slučaju ima beskonačno mnogo rješenja. Pošto je očito $y = 4 - z,$ dok se iz (3) dobije: $x = 15 - 3(4 - z) - 4z = 3 - z,$ zaključujemo da su sva rješenja sistema uređene trojke $(3 - z, 4 - z, z), z -$ proizvoljan realan broj.

2. Ako je *b* tražena prava i ako je $\vec{p} = (l, m, n)$ njen vektor pravca, tada je jednačina te prave $b: \frac{x-3}{l} = \frac{y+1}{m} = \frac{z+1}{n}.$

Očito je $\vec{q} = (1, -1, 2)$ vektor pravca prave *a* i osim toga imamo tačku $N(3, -2, 0) \in a.$

Da bi se prave *a* i *b* sjekle, postavićemo uslov: $\left(\overrightarrow{MN} \times \vec{p}\right) \cdot \vec{q} = 0.$

Pošto je $\overrightarrow{MN} = (0, -1, 1),$ slijedi: $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ l & m & n \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ l & m+n & n \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow l - (m+n) = 0 \Rightarrow l = m + n.$

Osim toga, $\measuredangle(a, b) = \measuredangle\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|} = \frac{l - m + 2n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{1+1+4}}$

$\Rightarrow 2(l - m + 2n) = \sqrt{6\left(l^2 + m^2 + n^2\right)}.$

Uvrstimo ovdje da je $l = m + n$:

$6n = \sqrt{6\left(2m^2 + 2n^2 + 2mn\right)} \; /^2$

$36n^2 = 12\left(m^2 + n^2 + mn\right) \Rightarrow 2n^2 - mn - m^2 = 0 \; / : m^2$

$2 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 - \frac{n}{m} - 1 = 0; \; \frac{n}{m} = t$ (smjena)

$2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, \; t_2 = -\frac{1}{2}.$

Imamo dva rješenja:

1) $\frac{n}{m} = 1 \Rightarrow n = m \Rightarrow l = 2m,$ pa je $\vec{p} = (2m, m, m) = m(2, 1, 1).$

Odaberimo da je $m = 1,$ dakle $\vec{p} = (2, 1, 1) \Rightarrow b: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1}.$

2) $\frac{n}{m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -2n = m \Rightarrow l = -n,$ pa je $\vec{p} = (-n, -2n, n) = n(-1, -2, 1).$

Odaberimo da je $n=-1$, dakle $\vec{p}=(1,2,-1)\Rightarrow b:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

3. Definiciono područje funkcije: $x^2\neq 3\Rightarrow x\neq\pm\sqrt{3}\Rightarrow x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

- funkcija je očito parna
- nule funkcije: $9x^2-x^4=x^2\left(9-x^2\right)=0$ povlači da je $x^2=0$ ili $x^2=9$, što znači da funkcija ima tri nul tačke: $x_1=0, x_{2,3}=\pm 3$.
- znak funkcije: zavisi očito samo od izraza $\left(9-x^2\right)=(3-x)(3+x)$, jer preostali faktori su kvadrati, dakle nenegativni brojni izrazi. Otuda se lako izvodi zaključak (pomoću tabele ili grafika kvadratne funkcije) da je funkcija pozitivna unutar intervala $\left(-3,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},3\right)$, a na ostalim intervalima skupa realnih brojeva je negativna.
- Funkcija ima dvije vertikalne asimptote, $x=\sqrt{3}$ i $x=-\sqrt{3}$, jer je

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=\lim_{x\to-\sqrt{3}}\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{18}{0+}=+\infty$$ (svi lijevi i desni limesi su jednaki).

Osim toga, funkcija ima horizontalnu asimptotu $y=-1$, jer je

$$\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{-x^4+3x^2}{x^4-6x^2+9}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=-1.$$

- Prvi izvod funkcije je:

$$y'=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)2\left(3-x^2\right)(-2x)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{2x\left(3-x^2\right)\left[\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)+2\left(9x^2-x^4\right)\right]}{\left(3-x^2\right)^4}$$

$$=\frac{2x\left(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{2x\left(3x^2+27\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{6x\left(x^2+9\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

Očito funkcija ima samo jednu stacionarnu tačku $x=0$ (koja je ujedno nula funkcije).

	$-\infty$ — $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ — 0	0 — $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ — $+\infty$
$6x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$3-x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
y'	$+$	$-$	$+$	$-$
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Dakle, tačka $O(0,0)$ je minimum funkcije.

- Drugi izvod funkcije:

$$y'' = \left[\frac{6x^3+54x}{\left(3-x^2\right)^3}\right]' = \frac{\left(18x^2+54\right)\left(3-x^2\right)^3 - \left(6x^3+54x\right)3\left(3-x^2\right)^2(-2x)}{\left(3-x^2\right)^6} =$$

$$= \frac{\left(3-x^2\right)^2\left[\left(18x^2+54\right)\left(3-x^2\right)+6x\left(6x^3+54x\right)\right]}{\left(3-x^2\right)^6} = \frac{54x^2-18x^4+162-54x^2+36x^4+324x^2}{\left(3-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{18x^4+324x^2+162}{\left(3-x^2\right)^4} = \frac{18\left(x^4+18x^2+9\right)}{\left(3-x^2\right)^4}.$$

Očito je $y''=0$ ako je $x^4+18x^2+9=0 \Rightarrow t^2+18t+9=0 \ \left(t=x^2\right)$.

$$t_{1,2} = \frac{-18\pm\sqrt{288}}{2} = \frac{-18\pm 12\sqrt{2}}{2} = -9\pm 6\sqrt{2}.$$

Pošto su oba dobijena broja negativna, a $t=x^2\geq 0,$ funkcija nema prevojnih tačaka. Detaljnije, može se uočiti da je drugi izvod funkcije pozitivan za sve *x* iz definicionog područja, tako da je data funkcija konveksna na cijelom svom definicionom području.

4. $I=\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$

Uzimamo smjenu: $\frac{1-x}{1+x}=t^2 \Rightarrow 1-x=t^2+t^2x \Rightarrow 1-t^2=x\left(t^2+1\right) \Rightarrow x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$

Slijedi: $dx=\frac{-2t\left(1+t^2\right)-2t\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt=\frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt,$ pa je

$$I=\int \frac{1}{\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\sqrt{t^2}\cdot\frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt = -4\int\frac{\left(1+t^2\right)^2}{\left(1+t^2-1+t^2\right)^2}\cdot\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt =$$

$$= -4\int\frac{t^2}{4t^4}dt = -\int\frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{t}+C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

II GRUPA

1. Dobiju se determinante: $D=0, D_x=-4(\lambda-2)(\lambda-3),\ D_y=-(\lambda+1)(\lambda-3), D_z=4(\lambda-3),$ (vidi računanje determinanti u rješenju I grupe, postupak je sasvim sličan).
Razlikujemo dva slučaja:
1) $\lambda\neq 3 \Rightarrow$ sistem nema rješenja
2) $\lambda=3 \Rightarrow D=D_x=D_y=D_z=0.$

Sistem tada glasi:

$-x+8y+7z=29$

$-x+4y+3z=13$

$x+4y+5z=19.$

Sabiranjem prve i treće, odnosno druge i treće jednačine dobijamo dvije ekvivalentne jednačine:

$12y+12z=48 \Leftrightarrow y+z=4$ i $8y+8z=32 \Leftrightarrow y+z=4.$

Dakle, ako je $\lambda=3,$ sistem ima beskonačno mnogo rješenja. Očito je $y=4-z,$ a zatim lako dobijemo da je $x=3-z.$ Sva rješenja sistema su uređene trojke $(3-z,4-z,z), z-$ proizvoljan realan broj.

2. Ako je α tražena ravan, možemo je dobiti pomoću jednačine pramena svih ravni koje prolaze kroz pravu

$$a:\begin{cases} a:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{2} \\ \dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4=y-3 \\ -y+3=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+7=0 \\ y+2z-3=0 \end{cases}$$, dakle imamo pramen

$$2x-y+7+\lambda(y+2z-3)=0 \Rightarrow 2x+y(\lambda-1)+2\lambda z+7-3\lambda=0 \text{ .... } (*)$$

Iz ove jednačine očitamo vektor normale ravni: $\vec{n}=(2,\lambda-1,2\lambda).$

S druge strane, vektor pravca prave *b* je kolinearan vektorskom proizvodu vektora $\overrightarrow{n_1}=(1,1,-2)$ i $\overrightarrow{n_2}=(1,1,1).$

$$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(3,-3,0)=3(1,-1,0).$$

Odaberimo da je $\vec{p}=(1,-1,0)$ vektor pravca prave *b*. Ako prava *b* i ravan α grade ugao $\varphi,$ tada je

$$\sin\varphi=\frac{\vec{n}\cdot\vec{p}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|}=\frac{2-\lambda+1}{\sqrt{4+(\lambda-1)^2+(2\lambda)^2}\cdot\sqrt{1+1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{3-\lambda}{\sqrt{2\left(5\lambda^2-2\lambda+5\right)}} \Rightarrow 3(3-\lambda)^2=4\left(5\lambda^2-2\lambda+5\right) \Rightarrow 17\lambda^2+10\lambda-7=0.$$

Rješenja ove jednačine su: $\lambda_1=-1, \lambda_2=\dfrac{7}{17}.$

Kad ove vrijednosti uvrstimo u jednačinu pramena (*), dobićemo dva rješenja:

$x-y-z+5=0$ i $17x-5y+7y+49=0.$

3. Funkcija $y=\ln\left(e^{2x}-5e^x+7\right)$ je definisana za one $x\in\mathbb{R}$ za koje je $e^{2x}-5e^x+7>0.$

Ako uzmemo smjenu $e^x=t,$ dobićemo kvadratnu nejednačinu $t^2-5t+7>0,$ koja je zadovoljena za sve $x\in\mathbb{R},$ jer je diskriminanta kvadratnog trinoma negativna.

Dakle, definiciono područje date funkcije je $x\in\mathbb{R}.$

- funkcija nema osobine parnosti i neparnosti;

- nule funkcije dobijemo rješavanjem jednačine $e^{2x}-5e^x+7=1 \Rightarrow e^{2x}-5e^x+6=0.$

$e^x=t \Rightarrow t^2-5t+6=0 \Rightarrow t_1=3, t_2=2.$

$e^x=3 \Rightarrow x=\ln 3 \approx 1,099$ i $e^x=2 \Rightarrow x=\ln 2 \approx 0,693.$

- grafik funkcije siječe *y* – osu u tački $T\left(0,\ln 3\right).$

- znak funkcije:

$y>0$ ako je $e^{2x}-5e^x+7>1 \Rightarrow e^{2x}-5e^x+6>0.$

$e^x=t \Rightarrow t^2-5t+6>0 \Rightarrow t<2 \text{ ili } t>3.$

Otuda, $x\in\left(-\infty,\ln 2\right)\cup\left(\ln 3,+\infty\right) \Rightarrow y>0$ i $x\in\left(\ln 2,\ln 3\right) \Rightarrow y<0.$

- vertikalnih asimptota nema;

- funkcija nema desnu horizontalnu asimptotu, jer očito $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^{2x}-5e^x+7\right)=+\infty,$ dok je

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^{2x}-5e^x+7\right)=\ln 7 \approx 1,946,$ pa funkcija ima lijevu horizontalnu asimptotu $y=\ln 7.$

- ispitujemo postojanje desne kose asimptote $y=kx+n$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}-5e^x+7\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}-5e^x}{e^{2x}-5e^x+7}=\left|\begin{matrix} e^x=t \\ t\to+\infty\end{matrix}\right|=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t^2-5t}{t^2-5t+7}=2,$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x}-5e^x+7\right)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x}-5e^x+7\right)-\ln e^{2x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2x}-5e^x+7}{e^{2x}}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{e^x}+\frac{7}{e^{2x}}\right)=\ln 1=0.$$

Funkcija ima desnu kosu asimptotu $y=2x.$

- prvi izvod funkcije:

$$y'=\frac{2e^{2x}-5e^x}{e^{2x}-5e^x+7}=\frac{e^x\left(2e^x-5\right)}{e^{2x}-5e^x+7}.$$

Stacionarna tačka: $2e^x-5=0 \Rightarrow e^x=\dfrac{5}{2} \Rightarrow x=\ln 2,5 \approx 0,92.$

Pošto je $e^x>0$ i $e^{2x}-5e^x+7>0$ za sve $x\in\mathbb{R},$ očito je $y'>0$ ako je

$2e^x-5>0 \Rightarrow e^x>\dfrac{5}{2} \Rightarrow x>\ln 2,5$ i $y'<0$ ako je $x<\ln 2,5.$

Otuda, funkcija ima minimum u tački sa apscisom $x=\ln 2,5.$ Druga koordinata minimuma je $y=\ln\left(\dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{2}+7\right)=\ln\dfrac{3}{4}\approx -0,29.$

Drugi izvod jednak je:

$$y''=\left(\frac{2e^{2x}-5e^x}{e^{2x}-5e^x+7}\right)'=\frac{\left(4e^{2x}-5e^x\right)\left(e^{2x}-5e^x+7\right)-\left(2e^{2x}-5e^x\right)\left(2e^{2x}-5e^x\right)}{\left(e^{2x}-5e^x+7\right)^2}=$$

$$=\frac{4e^{4x}-20e^{3x}+28e^{2x}-5e^{3x}+25e^{2x}-35e^{x}-\left(4e^{4x}-20e^{3x}+25e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}-5e^{x}+7\right)^{2}}=$$

$$=\frac{-5e^{3x}+28e^{2x}-35e^{x}}{\left(e^{2x}-5e^{x}+7\right)^{2}}.$$

Tada $y''=0\Rightarrow e^{x}\left(-5e^{2x}+28e^{x}-35\right)=0\Rightarrow -5e^{2x}+28e^{x}-35=0.$

$e^{x}=t\Rightarrow 5t^{2}-28t+35=0\Rightarrow t_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{784-700}}{10}=\frac{14\pm\sqrt{21}}{5}.$

Odatle se dobije: $x_1=\ln\frac{14-\sqrt{21}}{5}$ i $x_2=\ln\frac{14+\sqrt{21}}{5}.$

	$-\infty \quad x_1$	x_2	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$
y	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Funkcija ima dvije prevojne tačke.

4.

Uzećemo smjenu $\frac{2-x}{2+x}=t^{3}\Rightarrow 2-x=2t^{3}+t^{3}x\Rightarrow 2-2t^{3}=x\left(1+t^{3}\right)\Rightarrow x=\frac{2\left(1-t^{3}\right)}{1+t^{3}}.$

Slijedi: $dx=2\frac{-3t^{2}\left(1+t^{3}\right)-3t^{2}\left(1-t^{3}\right)}{\left(1+t^{3}\right)^{2}}dt=2\frac{-6t^{2}}{\left(1+t^{3}\right)^{2}}dt=-12\frac{t^{2}}{\left(1+t^{3}\right)^{2}}dt.$

$$I=\int\frac{2}{\left(2-\frac{2-2t^{3}}{1+t^{3}}\right)^{2}}\sqrt[3]{t^{3}}\left(-12\right)\frac{t^{2}}{\left(1+t^{3}\right)^{2}}dt=-24\int\frac{t^{3}}{\left(\frac{2+2t^{3}-2+2t^{3}}{1+t^{3}}\right)^{2}}\cdot\frac{dt}{\left(1+t^{3}\right)^{2}}=$$

$$=-24\int\frac{t^{3}}{\left(4t^{3}\right)^{2}}dt=-\frac{24}{16}\int\frac{t^{3}}{t^{6}}dt=-\frac{3}{2}\int t^{-3}dt=-\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=\frac{3}{4t^{2}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2}}+C.$$

III GRUPA

1. Rješavamo metodom determinante. Imamo da je
   $D=0;\ D_x=-5(\lambda-3)(\lambda-4);\ D_y=-(\lambda+1)(\lambda-4);\ D_z=5(\lambda-4).$
   Diskusija:
   1) $\lambda\neq 4\Rightarrow$sistem nema rješenja;
   2) $\lambda=4\Rightarrow D=D_x=D_y=D_z=0.$
   Sistem tada glasi:
   $-x+10y+9z=37$
   $-x+5y+4z=17$
   $x+5y+6z=23.$
   Sabiranjem prve i treće, odnosno druge i teće jednačine, dobijemo:
   $15y+15z=60\Rightarrow y+z=4$
   $10y+10z=40\Rightarrow y+z=4.$
   Prema tome, sistem ima u ovom slučaju beskonačno mnogo rješenja. Pošto je $y=4-z$ i $x=23-5y-6z=23-5(4-z)-6z=3-z,$ sva rješenja su uređene trojke $(3-z,4-z,z), z\in\mathbb{R}.$
2. Očito tačka $B(2,-2,3)\in a\Rightarrow B\in\alpha.$ Ako je $\vec{n}$ vektor normale ravni $\alpha,$ imamo da je $\alpha\perp\overrightarrow{AB}=(1,-3,5)$ i $\alpha\perp\vec{p},$ gdje je $\vec{p}=(-1,1,2)-$vektor pravca prave *a*. Zbog toga se vektor $\vec{n}$ može dobiti pomoću vektorskog proizvoda
   $$\overrightarrow{AB}\times\vec{p}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-3&5\\-1&1&2\end{vmatrix}=(-11,-7,-2).$$
   Možemo odabrati da je $\vec{n}=(11,7,2).$
   Jednačina ravni $\alpha:11(x-1)+7(y-1)+2(z+2)=0$
   $\Rightarrow\alpha:11x+7y+2z-14=0.$
   Neka je P projekcija tačke $O(0,0,0)$ na ravan $\alpha,$ a Q tačka simetrična tački O u odnosu na tu ravan. Kroz tačku O povucimo pravu *l* koja sadrži tačku O i okomita je na ravan $\alpha.$ Kao vektor pravca te prave može se uzeti vektor $\vec{n}$ pa je $l:\dfrac{x-1}{11}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z+2}{2}=t$
   $\Rightarrow x=11t+1,\ y=7t+1,\ z=2t-2-$ parametarski oblik jednačine prave l.
   Presjek te prave i ravni $\alpha:11(11t+1)+7(7t+1)+2(2t-2)-14=0$
   $\Rightarrow 174t=0\Rightarrow t=0\Rightarrow P(1,1,-2).$
   Ako je $Q(x,y,z),$ tada je $P\left(\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2},\dfrac{z}{2}\right),$ jer je tačka P središte duži $\overline{OQ},$ pa je onda očito $x=y=2,z=-4.$ Dakle, $Q(2,2,-4).$

3. Definiciono područje funkcije $y=\frac{x+2}{xe^{\frac{2}{x}}}$: $x\neq 0.$

Nul tačka: $x=-2.$

Znak: $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)\Rightarrow y>0$ i $x\in(-2,0)\Rightarrow y<0.$

Asimptote:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x+2}{xe^{\frac{2}{x}}}=\frac{2}{0\cdot e^{-\infty}}=\frac{2}{0-}=-\infty,$$

$\lim_{x\to 0+}\frac{x+2}{xe^{\frac{2}{x}}}=\frac{2}{0\cdot e^{+\infty}}=\frac{2}{0\cdot\infty}$ – neodređeni oblik. Zato imamo

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x+2}{xe^{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x+2}{x}e^{-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{1+\frac{2}{x}}{e^{\frac{2}{x}}}\overset{L.P.}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{2}{x^2}}{e^{\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{e^{\frac{2}{x}}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Prema tome, imamo lijevu vertikalnu asimptotu $x=0.$

Pošto je $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x}=1$ i $\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{2}{x}}=1,$ očito je $\lim_{x\to\pm\infty}y=1,$ što znači da je prava $y=1$ horizontalna asimptota funkcije.

Prvi izvod funkcije:

$$y'=\left(\frac{x+2}{x}e^{-\frac{2}{x}}\right)'=\left(1+\frac{2}{x}\right)'e^{-\frac{2}{x}}+\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{-\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x}\right)'=e^{-\frac{2}{x}}\cdot\frac{2}{x^2}\left(1+\frac{2}{x}-1\right)=\frac{4}{x^3}e^{-\frac{2}{x}}.$$

Funkcija očito nema stacionarnih tačaka, pa prema tome, nema ni ekstrema.

Za $x>0$ je $y'>0$ – funkcija je rastuća, a za $x<0$ je $y'<0$ – funkcija je opadajuća.

$$y''=4\left(x^{-3}e^{-\frac{2}{x}}\right)'=4\left(-3x^{-4}e^{-\frac{2}{x}}+x^{-3}e^{-\frac{2}{x}}\cdot\frac{2}{x^2}\right)=4e^{-\frac{2}{x}}\left(-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^5}\right)=4e^{-\frac{2}{x}}\cdot\frac{2-3x}{x^5}.$$

$y''=0$ ako je $2-3x=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}.$

	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2-3x$	$+$	$+$	$-$
x^5	$-$	$+$	$+$
y'	$-$	$+$	$-$
y	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Lako se dobije da je $y\left(\frac{2}{3}\right)=4e^{-3}\approx 0,2,$ pa je prevojna tačka funkcije $P\left(\frac{2}{3},\frac{4}{e^3}\right)$.

4. $I=\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}.$

Uzećemo smjenu :

$$\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}=t\Rightarrow\frac{x^2}{9-x^2}=t^2\Rightarrow x^2=9t^2-t^2x^2\Rightarrow x^2\left(1+t^2\right)=9t^2\Rightarrow x^2=\frac{9t^2}{1+t^2}\Rightarrow x=\frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Otuda je $dx=3\frac{\sqrt{1+t^2}-t\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}dt=3\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$

$$I=\int\frac{3\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}}{\left(\frac{9t^2}{1+t^2}+16\right)\sqrt{9-\frac{9t^2}{1+t^2}}}=3\int\frac{dt}{\left(9t^2+16+16t^2\right)\sqrt{9+9t^2-9t^2}}=\int\frac{dt}{25t^2+16}=\frac{1}{25}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{25}\cdot\frac{5}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{4}{5}}+C=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5t}{4}+C=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}+C.$$