Drugi parcijalni ispit, 20. 01. 2017.

GRUPA A

1. Naći sve presječne tačke i ugao između krivih $xy = a\sqrt{2}$ i $x^2 - y^2 = a,\ a > 0.$ (10 bodova)

2. Ispitati funkciju i nacrtati joj graf: $y = \dfrac{x^3 + 2}{(x+1)^2}$. (10 bodova)

3. Izračunati integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x)}$. (10 bodova).

GRUPA B

1. Naći sve presječne tačke i ugao između krivih $\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = p^2$ i $y^2 = 2px,\ p > 0.$ (10 bodova)

2. Ispitati funkciju i nacrtati joj graf: $y = \dfrac{x^2 - 4}{(x^2 + 4)^2}$. (10 bodova)

3. Izračunati integral: $\displaystyle\int \frac{(2 - \sin x + 2\cos x)\,dx}{1 - \cos x + 2\sin x}$. (10 bodova).

Pismeni ispit iz Matematike I, 3. 2. 2017.

I GRUPA

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra α :

$$\begin{aligned}
\alpha x + \alpha y + 5z &= \alpha^2 - \alpha \\
\alpha x + y + 10z &= -4\alpha - 1 \\
(\alpha - 1)y + (\alpha - 3)z &= \alpha + 1.
\end{aligned}$$

2. Dati su vrhovi paralelograma *ABCD*: $A(3,0,4), B(1,2,3), C(9,6,4)$.

   a) Naći preostali vrh *D*, uglove i površinu paralelograma.

   b) Na *z* – osi naći tačku *S* tako da je ABCDS piramida zapremine 252.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \ln\left(e^{2x} - 4e^x + 4\right)$.

4. Izračunati integral: $I = \displaystyle\int \frac{3x^4 - x^3 + 6x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)^2 (x + 1)}dx.$

II GRUPA

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra α :

$$\begin{aligned} &\alpha x+\alpha y+(\alpha+7)z=-3\alpha \\ &x+\alpha y+10z=-4\alpha-1 \\ &(\alpha-1)x-5z=\alpha^2+3\alpha+1. \end{aligned}$$

2. Dati su vrhovi trougla: $A(3,1,\lambda), B(2,-1,4), C(1,2,3)$.

   a) Izračunati broj λ tako da je ugao u vrhu C pravi i zatim naći dužine težišnica trougla ABC.

   b) Za nađeno λ odrediti tačku D sa osobinom da je vektor $\overrightarrow{CD}$ okomit na vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$, te da je zapremina piramide $ABCD$ jednaka 11.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y=\dfrac{x^4-15x^2-12}{x}$.

4. Izračunati integral: $I=\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x(x-1)(x^2+1)^2}dx.$

III GRUPA

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra α :

$$\begin{aligned} &\alpha x+y-z=\alpha \\ &x+\alpha y-z=1 \\ &x-y-\alpha z=1. \end{aligned}$$

2. Date su tačke: $A(1,1,-2), B(2,-1,5), C(\alpha,-7,-4), D(2,-1,-5), E(2,0,3)$.

a) Odrediti α tako da četverougao ABCD bude trapez $(AD \parallel BC)$.

b) Za nađeno α izračunati zapreminu piramide ABCDE i njenu visinu koja je povučena iz vrha E.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y=xe^{\frac{x+1}{x-3}}$.

4. Izračunati integral: $I=\displaystyle\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx.$

Pismeni ispit iz Matematike I, 17. 2. 2017.

I GRUPA

1. a) Dati su kompleksni brojevi: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i,\ z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i.$ Napisati ih u trigonometrijskom i eksponencijalnom (Ojlerovom) obliku i zatim izračunati brojeve $z = \frac{z_1}{z_2}$ i $w = \frac{z_1^{100}}{z_2^{99}}$.

   b) Izračunati vrijednost determinante $D = \begin{vmatrix} 1+z & z & 1 & w \\ 1+z^2 & z^2 & 1 & w^2 \\ 1+z^2 & 1 & z & w^3 \\ 1+z^2 & z^2 & 1 & 1+w^2 \end{vmatrix}$, gdje su z i w brojevi izračunati u a).

2. Odrediti koordinate vrhova A, B, C kvadrata ABCD ako tačke A i B leže na pravoj $p: \frac{x+9}{8} = \frac{y+9}{1} = \frac{z}{4}$, poznat je vrh $D(0,0,0)$, a vektor $\overrightarrow{AB}$ zaklapa oštre uglove sa sve tri koordinatne ose.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \frac{2x^3 - 3x^2 - 4}{3x^3 - 40}$ (bez analize znaka drugog izvoda).

4. Izračunati integral: $I = \int \frac{x^{14}}{\sqrt{1-x^6}} dx.$

II GRUPA

1. a) Dati su kompleksni brojevi: $z_1 = \sqrt{5}\,i,\ z_2 = \sqrt{15} + i\sqrt{5}.$ Napisati ih u trigonometrijskom i eksponencijalnom (Ojlerovom) obliku i zatim izračunati brojeve $z = z_1 z_2$ i $w = z_1^{101} z_2^{99}$.

   b) Izračunati vrijednost determinante $D = \begin{vmatrix} 1051 & 1000 & z & 51 \\ z^2+w & 1000z & 1000 & w \\ z+w^2 & 1000 & z^2 & w^2 \\ z^2+w+1 & 1000z & 1000 & 1+w \end{vmatrix}$, gdje su z i w brojevi izračunati u a).

2. Odrediti koordinate vrhova B, C i D kvadrata ABCD ako znamo vrh $A(-3,5,6)$, a tačke B i D leže na pravoj $p: \frac{x+1}{1} = \frac{y+13}{4} = \frac{z-13}{-3}$.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = e^{\frac{4x^2+3x}{2x+2}}$ (bez analize znaka drugog izvoda).

4. Izračunati integral: $I = \int \frac{x^9 + x^5 - 5x}{\sqrt{x^4 + 6x^2}} dx.$

III GRUPA

1. a) Dati su kompleksni brojevi: $z_1 = \sqrt{3} + 3i,\ z_2 = -\frac{1}{8\sqrt{3}} + \frac{i}{24}$. Napisati ih u trigonometrijskom i eksponencijalnom (Ojlerovom) obliku i zatim izračunati brojeve $z = z_1^2 z_2$ i $w = \frac{z_1^{99}}{z_2^{101}}$.

   b) Izračunati vrijednost determinante $D = \begin{vmatrix} z^2 & z+w+1 & 1 & w+1 \\ 1 & z^2+w^5 & z^4 & w^5 \\ z & 1+w^3 & z^3 & w^3 \\ z^2 & z+w & 1 & w \end{vmatrix}$, gdje su z i w brojevi izračunati u a).

2. Odrediti koordinate vrhova A, B, C kvadrata OACB ako tačke A i B leže na pravoj $p: \frac{x+17}{-8} = \frac{y+10}{-1} = \frac{z+4}{-4}$, a tačka O je koordinatni početak.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \frac{\ln^2 x - \ln x - 1}{x^3}$.

4. Izračunati integral: $I = \int \frac{5x^{24} + 15x^4}{\sqrt{4 - x^{10}}} dx$.

Pismeni ispit iz Matematike I, 23. 6. 2017.

I GRUPA

1. Riješiti matričnu jednačinu $B(I - X) = AX$, ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = A^T - I$, dok je I jedinična matrica.

2. Date su tačke $A(1,2,3)$ i $B(-1,1,2)$, te prava $a: \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$. Odrediti:

   a) Jednačinu prave b koja prolazi kroz tačku B paralelno pravoj a.
   b) Jednačinu ravni α koja prolazi kroz tačku A, a okomita je na pravu b.
   c) Presječnu tačku ravni α i prave a.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \frac{5 + 2\ln x}{3 - 2\ln x}$.

4. Izračunati integral: $I = \int \frac{\ln(x^2 + 4)}{(x+3)^2} dx$.

II GRUPA

1. Riješiti matričnu jednačinu $A^2X = I - ABX$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, a I je jedinična matrica.
2. Dati su tačka $T(1,0,3)$ i ravan $\alpha : x + 2z - 17 = 0$. Odrediti:

   a) Jednačinu ravni β koja prolazi kroz tačku T paralelno ravni α.

   b) Jednačinu prave a koja prolazi kroz tačku T i okomita je na ravan β.

   c) Projekciju tačke T na ravan α.
3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = e^{-2x}\left(x^2 - 4x - 8\right)$.
4. Izračunati integral: $I = \int \dfrac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{(x-2)^2}\,dx$.

III GRUPA

1. Riješiti matričnu jednačinu $A \cdot X \cdot B = A^2 + B^2$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
2. Date su tačke $A(1,0,2),\ B(-3,5,4), C(0,-6,8)$. Odrediti:

   a) Jednačinu prave a koja prolazi kroz tačku A paralelno pravoj BC.

   b) Jednačinu prave b koja prolazi kroz tačku B i okomita je na ravan koja sadrži tačke A, B, C.

   c) Jednačinu ravni koja sadrži tačku C i pravu b.
3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$.
4. Izračunati integral: $I = \int \dfrac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{\left(x^2 - 1\right)^2}\,dx$.

Pismeni ispit iz Matematike I, 7. 7. 2017.

I GRUPA

1. Odrediti sve vrijednosti parametra a za koje sistem jednačina
$$4x + ay - 12z = 0$$
$$ax + 9y - 18z = 0$$
$$2x + 3y - az = 0$$
   ima netrivijalna rješenja, pa zatim naći ta rješenja za najveću dobijenu vrijednost parametra a.
2. Neka su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju ugao $\dfrac{\pi}{4}$ rad. Izračunati površinu, obim i uglove paralelograma ABCD ako je $\overrightarrow{AC} = 2\vec{m} - \vec{n}$ i $\overrightarrow{DB} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = xe^{\frac{x}{2x-4}}$.

4. Izračunati integral: $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx.$

II GRUPA

1. Odrediti sve vrijednosti parametra b za koje sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4x + y + bz &= 0 \\ bx - y + z &= 0 \\ bx + by + z &= 0 \end{aligned}$$

ima netrivijalna rješenja, pa zatim naći ta rješenja za najmanju dobijenu vrijednost parametra b.

2. Neka su $\vec{m}$ i $\vec{v}$ vektori intenziteta 2, koji zatvaraju ugao $\frac{\pi}{3}$ rad. Dati su vektori: $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{v}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 4\vec{v}$.

   a) Naći projekciju vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

   b) Naći površinu trougla ABC, ako je $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

   c) Izračunati dužinu težišnice trougla ABC, povučenu iz vrha B.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \frac{x^3 - 5}{x^2 - 3}$.

4. Izračunati integral: $I = \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx.$

III GRUPA

1. Odrediti sve vrijednosti parametra c za koje sistem jednačina

$$\begin{aligned} 3x + cy + 2z &= 0 \\ cx + 12y + 4z &= 0 \\ 9x + 18y + cz &= 0 \end{aligned}$$

ima netrivijalna rješenja, pa zatim naći ta rješenja za najveću dobijenu vrijednost parametra c.

2. Izračunati dužine dijagonala, ugao između dijagonala i visinu paralelograma ABCD ako je $\overrightarrow{AB} = \vec{p} + \vec{q}$ i $\overrightarrow{BC} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 2, \measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \frac{x+3}{\ln^2(x+3)}$.

4. Izračunati integral: $I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx.$

Pismeni ispit iz Matematike I, 8. 9. 2017.

I GRUPA

1. Naći u skupu kompleksnih brojeva sve vrijednosti korjena $\sqrt[12]{1}$.
2. Odrediti vrijednost parametra k tako da se sijeku prave $a: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ i $b: \frac{x-k}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$, pa zatim naći njihovu presječnu tačku i jednačinu ravni koja ih sadrži.
3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \frac{8(x^3+x)}{(2x-1)^3}$.
4. Izračunati integral: $I = \int \frac{6x^3 - 18x^2 + 124x - 14}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}dx$.

II GRUPA

1. Naći u skupu kompleksnih brojeva sve vrijednosti korjena $\sqrt[4]{-2^{11}\left(1+i\sqrt{3}\right)}$.
2. Naći jednačinu ravni koja sadrži pravu $a: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$ i paralelna je pravoj $b: \begin{cases} x-y+z+1=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$.
3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \ln\frac{x}{x^2+4}$.
4. Izračunati integral: $I = \int \frac{3x^3 - 2x^2 - 2x - 40}{(x^2+6x+10)(x^2-2x+10)}dx$.

III GRUPA

1. Naći u skupu kompleksnih brojeva sve vrijednosti korjena $\sqrt[8]{256}$.
2. Naći međusobnu udaljenost pravih $a: \begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x-2y-3z+12=0 \end{cases}$ i $b: \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$.
3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-2}$ (bez analize znaka drugog izvoda).
4. Izračunati integral: $I = \int \frac{31x^2 + 67x + 4}{(x^2+8x+17)(x^2+2x+4)}dx$.

Pismeni ispit iz Matematike I, 22. 9. 2017.

I GRUPA

1. Diskutovati rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -5 & -7 & 5 & -4 \\ 6 & a & -8 & a-12 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ u zavisnosti od realnog parametra a.
2. Dati su vrhovi tetraedra $ABCD: A(3,2,0), B(1,2,0), C(0,0,-3), D(8,0,6)$. Izračunati zapreminu tog tetraedra i njegovu visinu koja je povučena iz vrha B.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y=\frac{x^2-1}{e^{x^2}}$.

4. Izračunati integral: $I=\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

II GRUPA

1. Diskutovati rang matrice $B=\begin{bmatrix} 3 & -12 & b+8 & 2 \\ 2 & -7 & b+2 & 1 \\ -1 & 5 & -8 & b+2 \\ 2 & -4 & b-10 & 1 \end{bmatrix}$ u zavisnosti od realnog parametra *b*.

2. Dati su vektori $\vec{a}=(k,1,4),\vec{b}=(1,-2,0),\vec{c}=(3,-3,4k)$. Izračunati zapreminu paralelopipeda koji je konstruisan nad ovim vektorima. Zatim odrediti za koje *k* su dati vektori komplanarni i za najveću dobijenu vrijednost parametra *k* izraziti vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y=\frac{(x+2)^4}{(x+1)^3}$.

4. Izračunati integral: $I=\int x^2\sqrt{x^2-6}\,dx$.

Pismeni ispit iz Matematike I, oktobar 2017.

1. Riješiti jednačinu u skupu kompleksnih brojeva: $z^9+\left(16-16i\sqrt{3}\right)z^5=\left(128+128i\sqrt{3}\right)z$.

2. Ravan $\alpha: x-4y+2z-7=0$ i prava $a:\begin{cases} x-2y-4z+3=0 \\ 2x+y-3z+1=0 \end{cases}$ imaju zajedničku tačku M. Odrediti jednačinu prave b koja sadrži tačku M, leži u ravni α i normalna je na pravu a.

3. Ispitati funkciju i nacrtati joj grafik: $y=\frac{18\ln^2 x+3\ln x+1}{x^3}$.

4. Izračunati integral: $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x\sqrt{6\sin^2 x-1}}$.