Prvi parcijalni ispit iz Matematike III, 16. 11. 2017.

GRUPA A

1. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(2n+1)!\right]^2}{(2n+3)^{n+5} \cdot (n+2)!}$.
2. Odrediti interval konvergencije i sumu reda koji se dobije integriranjem član po član stepenog reda čija je suma $f(x)=\frac{1}{1+x^3}$. Iskoristiti dobijeni rezultat da se nađe suma reda $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots$
3. Naći poluprečnik i interval konvergencije stepenog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^p+n}(x-1)^n$, u zavisnosti od realnog parametra $p>0$.

GRUPA B

1. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+7)^{n+2} \cdot (n+4)!}{\left[(2n+5)!\right]^2}$.
2. Odrediti interval konvergencije i sumu reda koji se dobije integriranjem član po član stepenog reda čija je suma $f(x)=\frac{1}{x^4-1}$. Iskoristiti dobijeni rezultat da se nađe suma reda $1+\frac{1}{5\cdot 16}+\frac{1}{9\cdot 16^2}+\frac{1}{13\cdot 16^3}+\ldots$
3. Naći poluprečnik i interval konvergencije stepenog reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n} \cdot x^n$, u zavisnosti od realnog parametra $p>0$.

GRUPA C

1. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{2^{2n-1}(2n)!}$.
2. Napisati stepeni red koji se dobije kad se stepeni red čija je suma $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ diferencira član po član dva puta uzastopno. Odrediti interval konvergencije tog reda i iskoristiti dobijeni rezultat da se sumira red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-n}{49^n}$.
3. Naći poluprečnik i interval konvergencije stepenog reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \cdot x^n$, u zavisnosti od realnog parametra $p>0$.

Drugi parcijalni ispit iz Matematike III, 18. 1. 2018.

1. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y = xy' + \sqrt{1-(y')^2} - y' \arccos y'$.
2. Date su tačke $A(0,2), B(4,0), C(2\pi+1,0), D(2\pi+1,4), E(0,4)$. Ako se tačka T nalazi unutar petougla $ABCDE$, izračunati vjerovatnoću događaja da ugao ATB bude tup, tj. $\measuredangle ATB > 90^0$.
3. Date su slučajne promjenljive X —boja automobila i Y —broj saobraćajnih nesreća. Imamo uzorak od 176 automobila koji su obojeni bijelom, plavom, bordo, crnom i crvenom bojom. U sljedećoj tabeli prikazan je broj nesreća koje su napravili ti automobili:

Broj nesreća \ Boja	Bijela	Plava	Bordo	Crna	Crvena
0	7	6	3	2	1
1	9	8	6	5	2
2	4	6	10	14	18
3	6	9	18	18	24

Sa rizikom $\alpha = 0{,}05$ testirati hipotezu o nezavisnosti slučajnih promjenljivih X i Y.

Pismeni ispit iz Matematike III, 2. 2. 2018.

GRUPA A

1. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2n+1}-1\right)$.
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $3y' + y \cdot \frac{x^2+a^2}{x^3-a^2x} = \frac{x(3x^2-a^2)}{y^2(x^2-a^2)}$.
3. Kutija sadrži tri kocke. Jedna kocka ima dvije crvene i četiri plave strane, druga ima tri crvene i tri plave, a treća ima jednu crvenu i pet plavih strana. Iz kutije se slučajno izvlači jedna kocka. Ona se baci i registruje se boja koja je pala na gornjoj strani te kocke. Izračunati vjerovatnoću da je to plava boja.
4. Funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive X data je sa:

$$f(x) = \begin{cases} c\cdot\sqrt{5-x^2}, x \in \left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}\right] \\ 0, \quad x \notin \left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}\right] \end{cases}.$$

Izračunati nepoznatu konstantu *c*, $P\left(X > \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ i $E(X)$.

GRUPA B

1. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $x\left(1-x^2\right)y' + \left(2x^2-1\right)y = x^3y^2$.
3. U svakoj od dvije kutije se nalazi po 10 crnih i 5 bijelih kuglica. Iz prve kutije se slučajno izabere jedna kuglica koja se onda prebaci u drugu kutiju. Zatim se iz druge kutije slučajno izabere jedna kuglica i prebaci u prvu kutiju. Najzad, iz prve kutije se izvuče slučajno jedna kuglica. Kolika je vjerovatnoća da je to bijela kuglica?
4. Funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive *X* data je sa:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{3}}\left(x^2-2x+2\right), & x \in [-1,3] \\ 0, & x \notin [-1,3] \end{cases}.$$

   Izračunati nepoznatu konstantu *k* i funkciju raspodjele $F(x)$.

Pismeni ispit iz Matematike III, 16. 2. 2018.

GRUPA A

1. Napisati u obliku stepenog reda funkciju $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ i odrediti interval u kome važi taj razvoj.
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'\sqrt{x} = \sqrt{y-x} + \sqrt{x}$.
3. Data je slučajna promjenljiva X –broj bacanja novčića u eksperimentu u kome bacamo novčić sve dok se grb ne pojavi tri puta. Naći zakon raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive X i izračunati $P(5 < X < 8)$.
4. Funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive *X* data je sa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k\sqrt{x}}{(1+x)^2}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}.$$

   Izračunati nepoznatu konstantu *k* i funkciju raspodjele $F(x)$.

GRUPA B

1. Napisati u obliku stepenog reda funkciju $f(x) = \cos^3 x \cdot \sin x$ i odrediti interval u kome važi taj razvoj.
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y\left(y - xy'\right) = \sqrt{x^4 + y^4}$.

3. Data je slučajna promjenljiva X −broj bacanja novčića u eksperimentu u kome bacamo novčić sve dok se pismo ne pojavi tri puta. Naći zakon raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive X i izračunati $P(6 < X < 9)$.
4. Funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive X data je sa:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\sqrt{x+1}}{(2+x)^2}, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}.$$

Izračunati nepoznatu konstantu k i funkciju raspodjele $F(x)$.

Pismeni ispit iz Matematike III, 22. 6. 2018.

1. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sqrt[3]{\frac{n-1}{n+1}}\right)^{\alpha}$ u zavisnosti od parametra α.
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y''' - 8y = e^{2x}(\sin x + x)$.
3. Imamo novčić kod koga je vjerovatnoća da padne grb $\frac{2}{5}$, a da padne pismo $\frac{3}{5}$. Naći zakon raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive X i izračunati njeno matematičko očekivanje $E(X)$, ako je X broj bacanja novčića u eksperimentu u kome bacamo novčić sve dok se ne pojavi pismo.
4. Iz iskustva je poznato da standardna devijacija (σ) mase pakovanja keksa od 200 gr iznosi 4 gr. Za provjeru da li je proizvodnja u okviru standarda (tj. da li je prosječna masa zaista 200 gr), uzet je uzorak od 25 pakovanja sa trake. Mase pakovanja (u gramima) su: 208, 202, 199, 199, 201, 211, 205, 196, 200, 201, 206, 202, 201, 203, 207, 194, 203, 200, 204, 202, 198, 202, 203, 206, 204. Testirati nultu hipotezu da je srednja masa $m_0 = 200\ g$ protiv alternativne $m_0 \neq 200g$ sa nivoom značajnosti 0.01.

Pismeni ispit iz Matematike III, 6. 7. 2018.

1. Naći poluprečnik i interval konvergencije, te sumu stepenog reda: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n}x^{3n}$.
2. Dokazati da diferencijalna jednačina $(2x + y - yx^2)dx + (x + x^3)dy = 0$ ima integracioni množilac oblika $\mu = \mu(x)$ ili $\mu = \mu(y)$ i zatim riješiti tu jednačinu.
3. Standardna homogena kocka za igru se baca tri puta. Dati su događaji: A −bar u jednom bacanju na kocki je pao broj 2 i B −zbir brojeva koji su na gornjoj strani kocke pali u prva dva bacanja jednak je broju koji je pao na toj kocki u trećem bacanju. Izračunati vjerovatnoće $P(A|B)$ i $P(B|A)$.
4. Data je funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive X:

$$f(x) = \begin{cases} c\left(2x^2 + 6x - 10\right)e^{2x}, & x \leq -1 \\ 0, & x > -1. \end{cases}$$

Odrediti nepoznatu konstantu c i matematičko očekivanje $E(X)$.

Pismeni ispit iz Matematike III, 7. 9. 2018.

1. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-5}{3^n}$.
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $2yy' = x\left[1+(y')^2\right]+(y')^4+3\cdot(y')^2$.
3. Ako je X slučajna promjenljiva diskretnog tipa, tako da je

$$P(X=n)=\frac{c}{(n+1)!}\ (n=1,2,3,\ldots),$$

   izračunati vrijednost konstante *c*, $E(X)$ i $\sigma^2(X)$.
4. Prema podacima u tabeli naći naći aritmetičku sredinu, disperziju, koeficijent varijacije, koeficijent asimetrije i ekscesa, te konstrisati histogram i poligon raspodjele:

Klase	Frekvencije
1,1 – 1,5	2
1,5 –1,9	6
1,9 –2,3	12
2,3 –2,7	19
2,7 –3,1	25
3,1 – 3,5	22
3,5 –3,9	20
3,9 –4,3	14
4,3 –4,7	8
4,7 –5,1	3

Pismeni ispit iz Matematike III, 21. 9. 2018.

1. Dokazati da funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{1+n^{\alpha}x^2}$ konvergira ravnomjerno na skupu $\mathbb{R}$ ako je $\alpha > 4$, koristeći Vajerštrasov kriterij.
2. Riješiti diferencijalnu jednačinu: $(2x^2y+x)y' - x^2y^3 + 2xy^2 + y = 0$ pomoću smjene $z = 2xy+1, z = z(x)$.
3. Meta ima oblik jednakostraničnog trougla. U taj trougao je upisan krug K, a u tom krugu je upisan jednakostranični trougao. Strijelac gađa metu jednim metkom. Izračunati vjerovatnoću da će strijelac pogoditi metu:
   a) U područje manjeg trougla
   b) U područje kruga K

c) U područje većeg trougla, van upisanog kruga K.

4. Data je funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive *X*:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{4x-x^2}}, & x\in[2,3] \\ 0, & x\notin[2,3]\end{cases}.$$

Izračunati konstantu *c*, matematičko očekivanje *E(X)* i disperziju $\sigma^2(X)$.

Pismeni ispit iz Matematike III, 4. 10. 2018.

1. Diskutovati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\ln\left(n\arcsin\frac{1}{n}\right)$ za razne vrijednosti realnog parametra α.

2. Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y(y')^2+2xy'-y=0$.

3. Iz velikog skladišta uzimaju se jedna za drugom elektronske cijevi i testiraju. Za svaku cijev vjerovatnoća da test bude pozitivan je 0,75, a da test bude negativan vjerovatnoća iznosi 0,25. Neka je X slučajna promjenljiva koja predstavlja broj izvedenih testova sve dok se ne dobije pozitivan test (uključujući i taj pozitivni test). Naći zakon raspodjele vjerovatnoća slučajne promjenljive X, izračunati njeno matematičko očekivanje i izračunati vjerovatnoću događaja A —eksperiment je završio poslije parnog broja testova.

4. Vlažnost smjese (X) utiče na gustinu proizvoda (Y). Na osnovu uzorka

Vlažnost smjese	4.7	5.0	5.2	5.2	5.9	4.7	5.9	5.2	5.3	5.9	5.6	5.0
Gustina proizvoda	3	3	4	5	10	2	9	3	7	6	6	4

naći jednačinu linearne regresije (Y u odnosu na X) i odrediti koeficijent korelacije između vlažnosti smjese i gustine proizvoda.